نيابة شيشاوة
ثانوية ابن الهيثم التأهيلية
امنتانوت

# سلسلة تمارين حول مبرهنتي رول و التزايدات المنتهية :

المستوى : 2 ب.ع.ر
موسم : 2010/2009

## تمرين 1 :

1) لتكن $f$ دالة متصلة على $[a;b]$، و قابلة للإشتقاق على $]a;b[$ بحيث : $f(a)=f(b)$

أ- بين أن : $\exists c\in ]a;b[ \ / \ f'(c)=0$

ب- أول هندسيا هذه النتيجة .

2) لتكن $f$ دالة متصلة على $[a;b]$، و قابلة للإشتقاق على $]a;b[$

أ- بين أن : $\exists c\in ]a;b[ \ / \ f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ب- أول هندسيا هذه النتيجة .

ج- استنتج أن : ( $f$ تزايدية على $I$ ) $\Leftrightarrow$ ( $\forall x\in I; f'(x)\geq 0$ )

## تمرين 2 :

نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة بما يلي : $g(x)=|x|-2\sqrt{|x|}$

1) بين أن : $g$ متصلة على $\mathbb{R}$ .

2) حدد $g'(x)$ على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ .

3) تحقق من أن : $g\left(-\dfrac{1}{4}\right)=g\left(\dfrac{1}{4}\right)$

4) أ- بين أن : $\forall x\in \left]-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right[ ; g'(x)\neq 0$

ب- بين أن : $\exists c\in \left]\dfrac{1}{4};2\right[ \ / \ g'(c)=0$

## تمرين 3 :

باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن :

1) $\forall x,y\in \mathbb{R}; |\cos(x)-\cos(y)|\leq |x-y|$

2) $\forall x\succ 0; \dfrac{x}{1+x^2}\prec \tan(x)$

3) $\forall x,y\in ]0,10[; |x\sin(x)-y\sin(y)|\leq 11|x-y|$

## تمرين 4 :

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^+$ بحيث :

$$\begin{cases} f(0)=f'(0)=0 \\ \exists a\in \mathbb{R}^+ \ / \ f(a)=0 \end{cases}$$

1) بين أن : $\exists b\in ]0,a[ \ / \ f'(b)=0$

2) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة بما يلي : $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}; x\succ 0 \\ 0; x=0 \end{cases}$

أ- بين أن : $g$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ .

ب- بين أن $g$ متصلة على اليمين في $0$ .

3) استنتج أن : $\exists c\in ]a,b[ \ / \ f(c)=cf'(c)$

## تمرين 5 : (Régle de l’Hospital)

لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين متصلتين على $[a;b]$ ، وقابلتين للإشتقاق على $]a;b[$ ، بحيث : $\forall x\in ]a,b[; g'(x)\neq 0$

1) بين أن الدالة $g$ تباينية .

2) بين أن : $\exists c\in ]a,b[ : \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

## تمرين 6 :

لتكن : $f(x)=x-\cos(x)$

1) بين أن $f$ متصلة و رتيبة قطعا على $\mathbb{R}$ .

2) بين أن : $\exists! \alpha\in \left]\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right[ \ / \ f(\alpha)=0$

3) بين أن : $\exists c\in \left]\alpha;\dfrac{\pi}{4}\right[ \ / \ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot f'(c)$

4) أ- بين أن : $f'(c)\succ \dfrac{3}{2}$

ب- استنتج أن : $\dfrac{\pi}{4}-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\times\dfrac{2}{3}\prec \alpha\prec \dfrac{\pi}{4}$

## تمرين 7 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ بحيث :

$u_1=1$ و $n\geq 2; u_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ .

1) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $x\mapsto \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ و على المجالات $[k;k+1]$ حيث $k\in\{1,2,...,n\}$ برهن أن :

$$\forall n\in \mathbb{N}^*, u_n-\frac{1}{n}\leq \frac{2}{3}-\frac{2}{3n\sqrt{n}}\leq u_n-\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

2) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة وحدد نهايتها .

## تمرين 8 :

ليكن $\alpha$ و $\beta$ عددين جذريين غير منعدمين و $f$ دالة عددية قابلة للإشتقاق على المجال $]0;1[$ بحيث :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ \forall x\in ]0;1[; f(x)\succ 0 \end{cases}$$

1) $g$ بحيث : $\forall x\in [0;1]; g(x)=(f(x))^{\alpha}\cdot(f(1-x))^{\beta}$

لتكن $]0;1[$ بين أن الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;1[$ .

2) استنتج أن :

$$\exists c\in ]0;1[ \ / \ \alpha\cdot\frac{f'(c)}{f(c)}=\beta\cdot\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$